Ueber eine algebraische Fläche 4. Ordnung, welche durch die auf ein rechtwinkliges Coordinaten-System bezogene Gleichung:

$$\ldots \quad c^2 z^2 = (x^2 \sin^2 \varphi - c^2)(y^2 \cos^2 \varphi - c^2)$$

dargestellt ist.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctor-Würde

bei

hochlöbl. philosophischen Facultät zu Marburg

eingereicht

von

Karl Löffler

aus

Worbis.

Darmstadt.

Buchdruckerei von G. Otto.

1874.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554015_0083

Seinen theuren Eltern

gewidmet

vom

Verfasser.

In der Gleichung

$$\ldots \quad c^2\, z^2 = (x^2 \sin^2 \varphi - c^2)\,(y^2 \cos^2 \varphi - c^2)$$

kommen die 3 Veränderlichen sämmtlich nur in der 2. Potenz vor; man kann also, ohne dass die Gleichung dadurch irgendwie geändert wird, für dieselben positive oder negative Werthe annehmen. Dieses bedeutet geometrisch, dass jede durch den Coordinaten-Anfangspunkt gezogene Sehne der Fläche in diesem Punkte halbirt wird; d. h. der Coordinaten-Anfangspunkt ist Mittelpunkt der Fläche. Demnach hat die durch obige Gleichung dargestellte Fläche einen Mittelpunkt, der mit dem Coordinaten-Anfangspunkte des Systems, auf welches die Gleichung der Fläche bezogen ist, zusammenfällt, und wird durch die Cordinaten-Ebenen in 8 symmetrische Theile zerlegt.

I. Geometrische Deutung der Fläche, deren Gleichung ist:

$$c^2\, z^2 = (x^2 \sin^2 \varphi - c^2)\,(y^2 \cos^2 \varphi - c^2).$$

Ziehen wir in der xy-Ebene durch den Coordinaten-Anfangspunkt 2 Gerade, welche mit der + x-Axe die Winkel φ und $-\varphi$ bilden, so sind die Gleichungen dieser beiden Linien:

(1) . . . . . $y = x \text{ tang } \varphi$; (2) . . . $y = -x \text{ tang } \varphi$;

Fällen wir jetst auf diese Geraden von einem beliebigen Punkte A Senhrechte, so dass die Summe der beiden Senkrechten $= 2c$ ist, so wird, wenn die Coordinaten von A mit x', y', z' und die des Endpunktes B der Senkrechten auf (1) mit x_1, y_1 bezeichnet werden

(3) . . . . . $\overline{OA}^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$;

(4) . . . . . $\overline{OB}^2 = x_1^2 + y_1^2 = x_1^2\,(y^1 + \text{tang}^2\,\varphi) = \dfrac{x_1^2}{\cos^2 \varphi}$;

(5) . . . . . $\overline{AB}^2 = (x' - x_1)^2 + (y' - y_1)^2 + z'^2$
$= (x' - x_1)^2 + (y' - x_1 \text{ tang } \varphi)^2 + z'^2$.

Ferner weil OBA ein rechtwinkeliges Dreieck ist:

(6) . . . . . $x'^2 + y'^2 + z'^2 = \dfrac{x_1^2}{\cos^2 \varphi} + (x' - x_1)^2 + (y^1 - y_1)^2 + z'^2$.

Aus dieser Gleichung und aus (1) erhalten wir nun:

(7) . . . . . $x_1 = (x' \cos \varphi + y' \sin \varphi) \cos \varphi$
$y_1 = (x' \cos \varphi + y' \sin \varphi) \sin \varphi$;

Diese Werthe in (5) eingesetzt so ergiebt sich:

(8) . . . $\overline{AB}^2 = (x' \sin \varphi - y' \cos \varphi)^2 \sin^2 \varphi + (x' \sin \varphi - y' \cos \varphi)^2 \cos^2 \varphi + z'^2$;
$= (x' \sin \varphi - y' \cos \varphi)^2 + z'^2$.

Wird das Zeichen für φ in dieser Gleichung geändert, so erhält man sofort für den Abstand AC des Punktes A von der Geraden (2) die Gleichung:

$$(9) \quad \overline{AC}^2 = (-x' \sin\varphi - y' \cos\varphi)^2 + z'^2 = (x' \sin\varphi + y' \cos\varphi)^2 + z'^2.$$

Folglich

$$(10) \quad \sqrt{(x' \sin\varphi - y' \cos\varphi)^2 + z'^2} + \sqrt{(x' \sin\varphi + y' \cos\varphi)^2 + z'^2} = 2c.$$

Werden die Wurzeln durch zweimaliges Quadriren weggeschafft, so wird:

$$(11) \quad c^2 z'^2 = x'^2 y'^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi - c^2 x'^2 \sin^2\varphi - c^2 y'^2 \cos^2\varphi + c^4; = (x'^2 \sin^2\varphi - c^2)(y^2 \cos^2\varphi - c^2);$$

welche Gleichung mit der gegebenen übereinstimmt. Der Punkt A also, dessen Abstände von den Geraden (1) und (2) einer constanten Summe gleich — = 2c — sind, liegt auf der durch die gegebene Gleichung dargestellten Fläche.

Fällen wir jetzt von einem andern beliebigen Punkte A' Senkrechte auf (1) und (2), so dass die Differenz dieser Senkrechten = 2c ist, so ergiebt sich, wenn die Coordinaten von A' mit x'', y'', z'' und die von B' — des Endpunktes der Senkrechten auf (1) — mit x_2, y_2 bezeichnet werden, wie oben:

$$(12) \quad \overline{A'B'}^2 = (x'' \sin\varphi - y'' \cos\varphi)^2 + z''^2;$$

und wenn C' der Endpunkt der Senkrechten auf (2) ist:

$$(13) \quad \overline{A'C'}^2 = (x'' \sin\varphi + y'' \cos\varphi)^2 + z''^2;$$

Demnach

$$(14) \quad \sqrt{(x'' \sin\varphi - y'' \cos\varphi)^2 + z''^2} - \sqrt{(x'' \sin\varphi + y'' \cos\varphi)^2 + z''^2} = 2c;$$

Erheben wir auch hier, wie oben, um die Wurzelgrössen wegzuschaffen, zweimal in's Quadrat, so wird

$$(15) \quad c^2 z''^2 = x''^2 y''^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi - c^2 x''^2 \sin^2\varphi - c^2 y''^2 \cos^2\varphi + c^4. = (x''^2 \sin^2\varphi - c^2)(y''^2 \cos^2\varphi - c^2);$$

welche Gleichung ebenfalls mit der gegebenen übereinstimmt. Der Punkt A', für den die Differenz seiner Abstände von den Geraden (1) und (2) constant = 2c ist, liegt demnach auch auf der durch die gegebene Gleichung dargestellten Fläche.

Fassen wir dies zusammen, so erhalten wir folgendes Theorem:

Die algebraische Fläche 4. Ordnung, deren Gleichung, bezogen auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, ist:

$$(16) \quad c^2 z^2 = (x^2 \sin^2\varphi - c^2)(y^2 \cos^2\varphi - c^2)$$

enthält sowohl den geometrischen Ort des Punktes, für den die Summe, als auch den geometrischen Ort des Punktes, für den die Differenz seiner Abstände von zwei sich (unter dem Winkel 2φ) schneidenden Geraden constant (= 2c) ist.

Wie aus Gleichung (16) ersichtlich, muss entweder — dem absoluten Betrage nach — gleichzeitig:

$x \leqq \frac{c}{\sin\varphi}$ und $y \leqq \frac{c}{\cos\varphi}$, oder: $x \geqq \frac{c}{\sin\varphi}$ und $y \geqq \frac{c}{\cos\varphi}$ sein, weil andernfalls für z sich imaginäre Werthe ergeben würden. Aus Gleichung (10) erhellt aber, dass x nicht $> \frac{c}{\sin\varphi}$ und aus der Gleichung (14) dass y nicht $< \frac{c}{\cos\varphi}$ werden kann. Hieraus folgt: Der Theil der Fläche, den wir für das Intervall: $x = 0$ bis $x = \pm \frac{c}{\sin\varphi}$, $y = 0$ bis $y = \pm \frac{c}{\cos\varphi}$, $z = \pm c$ bis $z = 0$ erhalten, ist der geometrische Ort des Punktes, für den die Summe, und der Theil der Fläche, den wir für das Intervall: $x = \pm \frac{c}{\sin\varphi}$ bis $x = \pm \infty$, $y = \pm \frac{c}{\cos\varphi}$ bis $y = \pm \infty$, $z = 0$ bis $z = \pm \infty$ erhalten, ist der geometrische Ort des Punktes, für den die Differenz seiner Abstände von zwei sich unter dem Winkel 2φ schneidenden Geraden constant = 2c ist. Den ersten Theil der Fläche wollen wir künftighin der Kürze halber mit Γ_0, den zweiten mit Γ_1 bezeichnen.

II. Discussion der Fläche, deren Gleichung ist:

$$c^2 z^2 = (x^2 \sin^2 \varphi - c^2)(y^2 \cos^2 \varphi - c^2)$$

a. Gerade, die durch den Mittelpunkt der Fläche gezogen werden.

Wird durch den Mittelpunkt der Fläche eine Gerade gezogen, so schneidet dieselbe, wenn sie mit den Coordinaten-Axen die Winkel α, β, γ bildet, die Fläche in Punkten, deren Coordinaten wir mit Hülfe der Gleichungen

$$(17) \quad \begin{cases} x = z \dfrac{\cos \alpha}{\cos \gamma}; \quad y = x \dfrac{\cos \beta}{\cos \alpha}; \quad z = y \dfrac{\cos \gamma}{\cos \beta}; \\ y = z \dfrac{\cos \beta}{\cos \gamma}; \quad z = x \dfrac{\cos \gamma}{\cos \alpha}; \quad x = y \dfrac{\cos \alpha}{\cos \beta}; \end{cases}$$

aus der Gleichung der Fläche (16) bestimmen können.

Setzen wir nämlich in diese Gleichung die Werthe für x und y aus Gleichung (17) ein, so erhalten wir eine Gleichung 4. Grades, die jedoch in Bezug auf z^2 vom 2. Grade ist und deren Auflösung giebt:

$$(18) \quad z^2 = c^2 \cos^2 \gamma \frac{\cos^2 \alpha \sin^2 \varphi + \cos^2 \beta \cos^2 \varphi + \cos^2 \gamma \pm \sqrt{(\cos^2 \alpha \sin^2 \varphi + \cos^2 \beta \cos^2 \varphi + \cos^2 \gamma)^2 - 4 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}}{2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi};$$

oder Zähler und Nenner multiplicirt mit:

$$R = \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi + \cos^2 \beta \cos^2 \varphi + \cos^2 \gamma \mp \sqrt{(\cos^2 \alpha \sin^2 \varphi + \cos^2 \beta \cos^2 \varphi + \cos^2 \gamma)^2 - 4 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi};$$

so ergiebt sich:

$$(19) \quad z^2 = c^2 \cos^2 \gamma \frac{2}{R}; \quad \text{oder: } z = \pm c \cos \gamma \sqrt{\frac{2}{R}}.$$

Da die Grösse unter dem Wurzelzeichen in R stets kleiner als das Quadrat der vor der Wnrzel stehenden Grösse und stets positiv ist, so wird z^2 stets 2 positive Werthe haben; mithin werden sich für die Ordinaten je vier, paarweise gleiche, dem Zeichen nach aber entgegengesetzte Werthe ergeben, und daraus folgt, dass jede durch den Mittelpunkt gehende Gerade die Fläche in 4 reellen Punkten treffen wird. Die beiden Schnittpunkte, die sich ergeben, wenn in R das Wurzelzeichen positiv genommen wird, gehören Γ_0, die beiden andern Schnittpunkte, die man erhält, wenn in R die Wurzelgrösse negativ genommen wird, Γ_1 an, wie leicht zu ersehen. Geht nun jene Gerade in die z-Axe über, so wird: $\alpha = \beta = 90^0$, $\gamma = 0$, mithin.

$$\ldots \quad z^2 = c^2 \cos^2 \gamma \frac{2}{\cos^2 \gamma \pm \cos^2 \gamma};$$

$$\text{d. i. } z = \pm c; \quad \text{oder: } z = \pm \infty.$$

Wird x und y mit Hülfe der Gleichungen (17) auf ähnliche Weise bestimmt, so erhalten wir:

$$(20) \quad x^2 = c^2 \cos^2 \alpha \frac{2}{R}; \quad \text{oder: } x = \pm c \cos \alpha \sqrt{\frac{2}{R}};$$

Geht nun die Gerade in die x-Achse über, so wird: $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = 90^0$, demnach:

$$\ldots \quad x^2 = c^2 \cos^2 \alpha \frac{2}{\sin^2 \varphi (\cos^2 \alpha \pm \cos^2 \alpha)}; \quad \text{also}$$

$$x = \pm \frac{c}{\sin \varphi}; \quad \text{oder } x = \pm \infty.$$

Ebenso wenn die Gerade in die y-Axe übergeht:

$$\ldots \quad y^2 = c^2 \cos^2 \beta \frac{2}{\cos^2 \varphi (\cos^2 \beta \pm \cos^2 \beta)}; \quad \text{also}$$

$$y = \pm \frac{c}{\cos \varphi}; \quad \text{oder } y = \pm \infty.$$

Resumiren wir dies, so erhalten wir das Theorem: Die Coordinaten-Achsen schneiden Γ_0 in 2 endlichen, Γ_1 in 2 unendlichen Punkten.

Geht jene Gerade, die durch den Mittelpunkt der Fläche gezogen war, in eine der beiden Geraden (1) und (2) über, z. B. in (1), so wird $\alpha = \varphi$, $\beta = 90^0 - \varphi$, $\gamma = 90^0$, mithin:

$$(21) \quad x^2 = c^2 \cos^2\varphi \; \frac{2}{\cos^2\varphi \sin^2\varphi + \cos^2\varphi \sin^2\varphi \pm \sqrt{(\cos^2\varphi \sin^2\varphi + \cos^2\varphi \sin^2\varphi)^2 - 4 \sin^4\varphi \cos^4\varphi}};$$

also: $x = \pm \frac{c}{\sin\varphi}$; ebenso $y = \pm \frac{c}{\cos\varphi}$; während $z = 0$.

Geht die Gerade in die Linien (2) über, so wird $\alpha = -\varphi$, $\beta = 90^0 + \varphi$, $\gamma = 90$; demnach erhält man dasselbe Resultat, nur dass jetzt entweder $x = \mp \frac{c}{\sin\varphi}$ oder $y = \mp \frac{c}{\cos\varphi}$ zu nehmen ist; d. h.

Für jede der beiden Geraden (1) und (2) reduciren sich die Schnittpunkte, mag in R die Wurzelgrösse positiv oder negativ genommen werden, auf 2, deren resp. Coordinaten sind:

$$x = \frac{c}{\sin\varphi}, \quad y = \frac{c}{\cos\varphi}, \quad z = 0 \text{ und } x = -\frac{c}{\sin\varphi}, \quad y = -\frac{c}{\cos\varphi}, \quad z = 0;$$

$$x = \frac{c}{\sin\varphi}, \quad y = -\frac{c}{\cos\varphi}, \quad z = 0 \text{ und } x = -\frac{c}{\sin\varphi}, \quad y = \frac{c}{\cos\varphi}, \quad z = 0.$$

d. i. Γ_0 und Γ_1 haben diese 4 Punkte, aber auch weiter keine, gemeinsam. In diesen Punkten bildet die Fläche jedesmal einen Sattel.

b. Linien auf der Fläche, die durch den Schnitt der Coordinaten-Ebenen mit der Fläche erzeugt werden.

Setzen wir in der Gleichung der Fläche nach einander $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, so ergeben sich für die Schnitte der xz- und yz-Ebene die resp. Gleichungen

$$(22) \quad x^2 \sin^2\varphi + z^2 = c^2; \quad \text{oder:} \quad \frac{x^2}{\frac{c^2}{\sin^2\varphi}} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0;$$

$$(23) \quad y^2 \cos^2\varphi + z^2 = c^2; \quad \text{oder:} \quad \frac{y^2}{\frac{c^2}{\cos^2\varphi}} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Diese Gleichungen stellen Ellipsen, bezogen auf ihre Axen dar; dieselben haben die kleine Axe, welche in die z-Achse fällt und den Werth 2c hat, gemeinsam.

Für den Schnitt der xy-Ebene mit der Fläche erhalten wir die Gleichung:

$$(24) \quad (x^2 \sin^2\varphi - c^2)(y^2 \cos^2\varphi - c^2) = 0;$$

welche in die beiden folgenden zerfällt:

$$(25) \quad x^2 \sin^2\varphi - c^2 = 0; \quad \text{oder } (x \sin\varphi + c)(x \sin\varphi - c) = 0;$$

$$(26) \quad y^2 \cos^2\varphi - c^2 = 0; \quad \text{oder } (y \cos\varphi + c)(y \cos\varphi - c) = 0;$$

Jede dieser Gleichungen ist die Gleichung eines Systems zweier parallelen Geraden, von denen das durch die Gleichung (25) dargestellte der y-Axe, und das durch die Gleichung (26) dargestellte der x-Axe parallel ist. Die Fläche wird also von der xy-Ebene in vier geraden Linien geschnitten.

Hierdurch werden wir auf die Frage geführt, ob die Fläche noch andere Gerade als jene vier enthalte oder nicht? Um dieselbe zu erledigen, untersuchen wir, ob es solche Werthe von λ_0, μ_0; λ_1, μ_1 giebt, dass die Gleichungen der geraden Linie

$$(27) \quad \begin{aligned} x &= \lambda_0 z + \mu_0 \\ y &= \lambda_1 z + \mu_1 \end{aligned}$$

die Gleichung (16) der Fläche identisch befriedigen. Eliminiren wir dieserhalb die Coordinaten x, y aus der Gleichung (16) der Fläche und aus der Gleichung (27), so wird:

$$(28)\ \left\{\begin{array}{l}\lambda_0^2\lambda_1^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,z^4+2\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\lambda_0\lambda_1(\lambda_0\mu_1+\lambda_1\mu_0)\,z^3+([\lambda_0^2\mu_1^2+4\lambda_0\lambda_1\mu_0\mu_1+\lambda_1^2\mu_0^2]\sin^2\varphi\cos^2\varphi\\ \qquad -c^2[\lambda_1^2\cos^2\varphi+\lambda_0^2\sin^2\varphi+1])\,z^2+2(\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\mu_0\mu_1[\lambda_0\mu_1+\lambda_1\mu_0]\\ \qquad -c^2[\lambda_0\mu_0\sin^2\varphi+\lambda_1\mu_1\cos^2\varphi])\,z+[\mu_0^2\sin^2\varphi-c^2][\mu_1^2\cos^2\varphi-c^2]=0.\end{array}\right.$$

Soll diese Gleichung für jeden beliebigen Werth von z Geltung haben, so müssen die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von z einzeln $= 0$ sein. Daraus ergeben sich zur Bestimmungvon $\lambda_0, \mu_0; \lambda_1\,\mu_1$ die Relationen:

$$\lambda_0\lambda_1=0;\quad \lambda_0\lambda_1(\lambda_0\mu_1+\lambda_1\mu_0)=0;$$
$$[\lambda_0^2\mu_1^2+4\lambda_0\lambda_1\mu_0\mu_1+\lambda_1^2\mu_0^2]\sin^2\varphi\cos^2\varphi-c^2[\lambda_1^2\cos^2\varphi+\lambda_0^2\sin^2\varphi+1]=0$$
$$\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\mu_0\mu_1[\lambda_0\mu_1+\lambda_1\mu_0]-c^2[\lambda_0\mu_0\sin^2\varphi+\lambda_1\mu_1\cos^2\varphi]=0$$
$$[\mu_0^2\sin^2\varphi-c^2][\mu_1\cos^2\varphi-c^2]=0;$$

welche sich wegen $\lambda_0\lambda_1=0$ auf folgende reduciren:

$$\lambda_0\lambda_1=0;\ [\lambda_0^2\mu_1^2+\lambda_1^2\mu_0^2]\sin^2\varphi\cos^2\varphi-c^2[\lambda_1^2\cos^2\varphi+\lambda_0^2\sin^2\varphi+1]=0;$$
$$\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\mu_0\mu_1[\lambda_0\mu_1+\lambda_1\mu_0]-c^2[\lambda_0\mu_0\sin^2\varphi+\lambda_1\mu_1\cos^2\varphi]=0;$$
$$[\mu_0^2\sin^2\varphi-c^2][\mu_1^2\cos^2\varphi-c^2]=0.$$

Zu Folge der ersten Bedingung muss entweder $\lambda_0 = 0$, oder $\lambda_1 = 0$ sein. Nimmt man den ersten Fall an, so gehen die aufgestellten Bedingungen in die nachfolgenden über:

$$\lambda_0=0;\ \lambda_1^2(\mu_0^2\sin^2\varphi-c^2)\cos^2\varphi-c^2=0;$$
$$\lambda_1\mu_1(\mu_0^2\sin^2\varphi-c^2)\cos^2\varphi=0;\ (\mu_0^2\sin^2\varphi-c^2)(\mu_1^2\cos^2\varphi-c^2)=0.$$

Die letzte Relation liefert entweder

$$\mu_0^2\sin^2\varphi-c^2=0;\quad \text{oder } \mu_1^2\cos^2\varphi-c^2=0;$$

die zweite aber zeigt, dass so lange λ_1 einen endlichen Werth haben soll, nicht $\mu_0^2\sin^2\varphi-c^2=0$ angenommen werden darf; also muss dann gesetzt werden $\mu_1^2\cos^2\varphi-c^2=0$.

Hiernach würde noch den Relationen zu genügen sein:

$$\lambda_1^2(\mu_0^2\sin^2\varphi-c^2)\cos^2\varphi-c^2=0;\ \text{und } \lambda_1\mu_1(\mu_0^2\sin^2\varphi-c^2)=0.$$

Nach der ersten darf λ_1 nicht $= 0$ sein, also folgt aus der zweiten, dass $\mu_1 = 0$ sein müsste; dieser Werth von μ_1 würde aber aus der Bedingung: $\mu_1^2\cos^2\varphi-c^2=0$ machen $c = 0$; mithin bleibt nur übrig anzunehmen: $\mu_0^2\sin^2\varphi-c^2=0$. Diese Annahme ist aber nur dann gestattet, wenn λ_1 als unendlich angenommen wird.

Es ist aber, wie aus der Differentialgleichung der zweiten Gleichung von (27) hervorgeht, λ_1 die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Projection der in Rede stehenden Linie auf die yz-Ebene mit der z-Achse bildet. Soll nun λ_1 unendlich gross werden, so muss jener Winkel $= \frac{1}{2}\pi$ und die projicirende Ebene eine zur z-Achse senkrechte, also jene Gerade (27) eine zur xy-Ebene parallele Linie sein. Hiernach würden die Gleichungen (27) übergehen müssen in:

$$x=\mu_0$$
$$z=\frac{y-\mu_1}{\lambda_1}$$

und die Gleichung der Fläche durch Substitution identisch befriedigen; d. i. es müsste sein:

$$(29)\quad (\mu_0^2\sin^2\varphi-c^2)(y^2\cos^2\varphi-c^2)=c^2\frac{(y_1-\mu_1)^2}{\lambda_1^2};$$
$$\text{d. i. } (\mu_0^2\sin^2\varphi-c^2)(y^2\cos^2\varphi-c^2)=0.$$

Wir werden somit auf das eine Paar der obigen Parallelen — das der zur y-Achse Parallelen — geführt. Durch die Annahme $\lambda_1 = 0$ und $\lambda = \infty$ würden wir auf das andere System der erwähnten, das der zur x-Ache Parallelen kommen.

Die Fläche enthält demnach keine andere Gerade, als jene vier, die durch den Schnitt der xy-Ebene mit der Fläche erzeugt werden.

Diese 4 Geraden schneiden sich in den Punkten:

$$x = \frac{c}{\sin\varphi},\quad y = \frac{c}{\cos\varphi},\ z = 0;\quad x = -\frac{c}{\sin\varphi},\quad y = \frac{c}{\cos\varphi},\ z = 0;$$

$$x = -\frac{c}{\sin\varphi},\quad y = -\frac{c}{\cos\varphi},\ z = 0;\quad x = \frac{c}{\sin\varphi},\quad y = -\frac{c}{\cos\varphi},\ z = 0;$$

und begrenzen ein Rechteck, dessen Inhalt ist:

$$J = \frac{4\,c^2}{\sin\varphi\,\cos\varphi} = \frac{8\,c^2}{\sin 2\,\varphi}.$$

Die Schnittpunkte der beiden Geraden (1) und (2) hatten dieselben Coordinaten (cf. pag. 4); mithin gehen diese Geraden durch je 2 correspondirende Schnittpunkte jener 4 Linien; d. i. die Linien (1) und (2) sind die Diagonalen des von den 4 Geraden, in welchen die xy-Ebene die Fläche (16) durchgeht, eingeschlossenen Rechtecks.

Wie wir schon pag. 2 gesehen, können für z nur so lange reelle Werthe existiren, als entweder — dem absoluten Betrage nach — gleichzeitig ist

$$x \leqq \frac{c}{\sin\varphi} \text{ und } y \leqq \frac{c}{\cos\varphi};\ \text{oder } x \geqq \frac{c}{\sin\varphi} \text{ und } y \geqq \frac{c}{\cos\varphi}.$$

Die Fusspunkte der z-Ordinate treffen also die xy-Ebene nur in solchen Punkten, die entweder innerhalb des gedachten Rechtecks oder in den Scheidelwinkelräumen desselben resp. auf den Schenkeln dieser Winkel selbst liegen.

Der Theil der Fläche, den wir mit Γ_0 bezeichnet haben, liegt demnach ober- und unterhalb des mehrfach erwähnten Rechtecks, während der Theil, den wir mit Γ_1 bezeichnet haben, sich ober- und unterhalb der 4 Scheitelwinkelräume des Rechtecks erstreckt.

c. Linien auf der Fläche, durch den Coordinaten-Ebenen parallel gelegte Schnitte erzeugt.

Setzen wir $x = a$, so ergiebt sich für den in der Entfernung a vom Coordinaten-Anfangspunkte, parallel der yz-Ebene, gelegten Schnitt die Gleichung:

(30) . . . . . $c^2 z^2 = (a^2 \sin^2\varphi - c^2)(y^2\cos^2\varphi - c^2)$

$$\text{oder } \frac{y^2}{\frac{c^2}{\cos^2\varphi}} - \frac{z^2}{a^2\sin^2\varphi - c^2} - 1 = 0.$$

Diese Gleichung stellt, je nachdem $a \gtrless \frac{c}{\sin\varphi}$ ein System von Ellipsen oder Hyperbeln dar, deren Halbaxen die Länge $\frac{c}{\cos\varphi}$ und $\sqrt{c^2 - a^2\sin^2\varphi}$ resp. $\sqrt{a^2\sin^2\varphi - c^2}$ haben. Die erste dieser Axen ist unabhängig von a und beiden Systemen gemeinsam, die zweite nimmt mit wachsendem a im Ellipsensysteme beständig ab, im Hyperbelnsysteme beständig zu; ihr Werth ist am grössten im ersten Systeme für $a = 0$, nämlich $= 2c$, im zweiten für $a = \infty$, nämlich $= \infty$; am kleinsten in beiden Systemen für $a = \frac{c}{\sin\varphi}$ nämlich $= 0$.

Alle Schnitte also parallel der yz-Ebene sind Ellipsen, deren grosse Achse den constanten Werth $\frac{2c}{\cos\varphi}$ hat, deren kleine Axe aber von 2c bis 0 abnimmt, wenn sie in der Entfernung $a = 0$ bis $a = \frac{c}{\sin\varphi}$, Hyperbeln, deren Hauptaxe denselben constanten Werth $\frac{2c}{\cos\varphi}$ hat, deren Nebenaxe aber von 0 bis ∞ wächst, wenn sie in der Entfernung $a = \frac{c}{\sin\varphi}$ bis $a = \infty$ vom Coordinaten-Anfangspunkte gelegt werden. Während demnach die Ellipsenschnitte immer flacher werden und schliesslich in Gerade degeneriren, welche der grossen Achse gleich sind und auf (25) fallen, beginnen die Hyperbelschnitte mit dieser Grenzlage, sind anfangs sehr flach und werden dann immer ausgeschweifter. Die Brennpunkte der Ellipsenschnitte nähern sich immer mehr den Geraden (26), bis sie mit den Schnittpunkten der

Systeme (26) und (25) zusammenfallen, während die der Hyperbelschnitte anfangs jene Schnittpunkte sind, sich dann aber immer mehr von den Geraden (26) entfernen, bis sie endlich in's Unendliche rücken.

Ebenso verhält es sich mit den zur x z-Ebene parallel gelegten Schnitten, deren Gleichung ist:

$$(31) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{x^2}{\frac{c^2}{\sin^2\varphi}} - \frac{z^2}{a^2\cos^2\varphi - c^2} - 1 = 0$$

und in welcher $a^2 \lessgtr \frac{c^2}{\cos^2\varphi}$ angenommen ist. Hier hat die grosse Achse des Ellipsensystemes den constanten Werth $\frac{2c}{\sin\varphi}$, während die kleine Axe ebenfalls wieder von 2c bis 0 abnimmt und schliesslich die Ellipsenschnitte in Gerade übergehen, welche $= \frac{2c}{\sin\varphi}$ auf das System (26) fallen. Die Hauptaxe des Hyperbelsystemes hat denselben constanten Werth wie die grosse Axe des Ellypsensystemes, während die Nebenaxe von 0 bis ∞ wächst. Die Hyperbelschnitte beginnen in den Geraden (26).

Γ_0 wird demnach von zwei sich orthogonal schneidenden Ellipsensystemen, deren resp. grosse Axen sind: $\frac{2c}{\sin\varphi}$ und $\frac{2c}{\cos\varphi}$, und deren kleine Axen von 2c bis 0 abnehmen, gebildet; Γ_1 dagegen von zwei sich orthogonal schneidenden Hyperbelnsystemen, deren resp. Hauptaxen denselben Werth haben wie die ihnen parallelen Ellipsensysteme, und deren Nebenaxen von 0 bis ∞ wachsen.

d. Linien auf der Fläche, erzeugt durch den Schnitt von Ebenen, die durch die Geraden (1) und (2) und die z-Achse gelegt werden.

Drehen wir jetzt das Coordinatensystem um die z-Axe derartig, dass die x-Axe in die Gerade (1) fällt, so sind die x- und die y-Axe um den Winkel φ verschoben, und wir erhalten in Folge dessen die Transformationsformeln, wenn x_1 y_1 die Coordinaten in Bezug auf das neue System sind:

$$x = x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi$$
$$y = x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi.$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichung (16) der Fläche ein und lassen $y_1 = 0$ werden, so erhalten wir die Gleichung des Schnittes der x_1 z-Ebene mit der Fläche:

$$(32) \quad \ldots\ldots \quad (x_1^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi - c^2)(x_1^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi - c^2) = c^2 z^2$$

mithin:

$$(33) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad x_1^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi - c^2 = \pm cz; \text{ oder}$$
$$x_1^2 = \frac{c}{\sin^2\varphi \cos^2\varphi}(c \pm z) = \frac{4c}{\sin^2 2\varphi}(c \pm z).$$

Dies sind die Gleichungen zweier congruenten, einander zugewendeten Parabeln, deren Axe in der z-Axe liegen und die sich in den Endpunkten der einen Diagonale des wiederholt erwähnten Rechtecks, welche die Gerade (1) ist, schneiden.

Drehen wir das Coordinatensystem um die z-Achse so, dass die x-Axe in die Gerade (2) fällt und bezeichnen dieselbe mit x_2, so erhalten wir für den Schnitt der Ebene, die durch diese Gerade und die z-Axe gelegt wird, mit der Fläche die Gleichung:

$$(34) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad x_2^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi - c^2 = \pm cz; \text{ oder}$$
$$x_2^2 = \frac{4c}{\sin^2 2\varphi}(c \pm z).$$

Die beiden durch diese Gleichung dargestellten congruenten Parabeln schneiden sich in den Endpunkten der andern Diagonale jenes Rechtecks, welche die Gerade (2) ist.

Es giebt hiernach im Ganzen 4 solcher Parabeln, die sämmtlich dieselben Axe und je 2 denselben Scheitelpunkt $z = \mp c$ und denselben Brennpunkt $z = \pm \left(\frac{c}{\sin^2 2\varphi} - c\right) = \pm c \operatorname{ctg}^2 2\varphi$ haben.

Die beiden Parabeln, deren Scheitelpunkte im Endpunkte der — z-Axe liegen, erstrecken sich für $z = -c$ bis $z = 0$, und die beiden, deren Scheitelpunkte im Endpunkte der + Axe liegen, für $z = +c$ bis $z = 0$ auf Γ_0, dagegen für $z = 0$ bis $z = +\infty$ resp. $z = -\infty$ auf Γ_1.

Differentiiren wir die Gleichung (33) oder (34), so erhalten wir mit Weglassung der Accente:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x \sin^2 2\varphi}{2c};$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{\sin^2 2\varphi}{2c};$$

und

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x \sin^2 2\varphi}{2c}$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{\sin^2 2\varphi}{2c}$$

$\frac{dz}{dx}$ wechselt mit x seine Zeichen; die Kurve steigt also im ersten Falle, wenn x positiv, fällt, wenn x negativ ist; im zweiten Falle gerade umgekehrt. $\frac{d^2z}{dx^2}$ ist constant und im ersten Falle positiv, d. h. die Kurve wendet ihre Konvexität nach unten; im zweiten Falle ist $\frac{d^2z}{dx^2}$ negativ, d. h. die Kurve wendet ihre Konvexität nach oben. So lange demnach die Parabeln auf Γ_0 verbleiben, sind sie gegen die xy-Ebene concav, sobald sie aber auf Γ_1 übergehen, convex gekrümmt.

Für $x = 0$ wird $\frac{dz}{dx}$ gleichfalls $= 0$, $z = \pm c$; d. h. für die beiden Parabeln, denen die ersten beiden Differentialgleichungen zugehören, hat die z-Ordinate ein Minimum $= -c$, für die beiden andern dagegen ein Maximum $= +c$.

e. Maximum oder Minimum der Fläche.

Differentiiren wir jetzt die Gleichung (16) der Fläche, so ergiebt sich:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{x \sin\varphi\,(y^2 \cos^2\varphi - c^2)}{c^2 z};$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{y \cos^2\varphi\,(x \sin^2\varphi - c^2)}{c^2 z};$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{\sin^2\varphi\,(y^2 \cos^2\varphi - c^2)}{c^2 z} - \frac{x^2 \sin^4\varphi\,(y^2 \cos^2\varphi - c^2)^2}{c^4 z^3};$$

$$= \frac{\sin^2\varphi\,(y^2 \cos^2\varphi - c^2)}{c^2 z} - \frac{x^2 \sin^2\varphi\,(y^2 \cos^2\varphi - c^2)}{c^2 z\,(x^2 \sin^2\varphi - c^2)}$$

$$= -\frac{\sin^2\varphi\,(y^2 \cos^2\varphi - c^2)}{z\,(x^2 \sin^2\varphi - c^2)};$$

$$\frac{d^2 z}{dx\,dy} = \frac{2xy \sin^2\varphi \cos^2\varphi}{c^2 z} - \frac{xy \sin^2\varphi \cos^2\varphi\,(x^2 \sin^2\varphi - c^2)(y^2 \cos^2\varphi - c^2)}{c^4 z^3}$$

$$= \frac{xy \sin^2\varphi \cos^2\varphi}{c^2 z};$$

$$\frac{d^2 z}{dy^2} = -\frac{\cos^2\varphi\,(x^2 \sin^2\varphi - c^2)}{z\,(y^2 \cos^2\varphi - c^2)}; \quad \left(\text{analog } \frac{d^2 z}{dx^2}\right)$$

Für $x = y = 0$ wird:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} = 0; \quad \frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{\sin^2\varphi}{z}; \quad \frac{d^2z}{dy^2} = -\frac{\cos^2\varphi}{z}; \text{ und}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2 = +\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{z^2}, \text{ da } \frac{d^2z}{dx\,dy} = 0 \text{ ist.}$$

$\frac{d^2z}{dx^2}$ und $\frac{d^2z}{dy^2}$ wechseln mit z ihr Zeichen; für positive Werthe von z sind dieselben negativ, für negative dagegen positiv. Für $x = y = 0$ liefert aber Gleichung (16) der Fläche $z = \pm c$. Die vorstehenden Relationen sind die Bedingungen für das Vorhandensein eines Maximums resp. Minimums. Die Fläche hat also für die z-Ordinate in $x = y = 0$, $z = +c$ ein Maximum, in $x = y = 0$, $z = -c$ ein Minimum.

Für $x = \pm\frac{c}{\sin\varphi}$, $y = \pm\frac{c}{\cos\varphi}$ wird der Zähler von $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ ebenfalls $= 0$; da jedoch in diesem Falle aus Gleichung (16) folgt $z = 0$, so wird $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} = \frac{0}{0}$. Um für diesen unbestimmten Ausdruck den wahren Werth zu finden, entwickeln wir, da der Taylor'sche Satz hier nicht anwendbar, Zähler und Nenner nach Potenzen von h und k, wenn $x + h$ statt x, $y + k$ statt y und für z der Werth aus Gleichung (16) gesetzt wird:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{-(x+h)\sin^2\varphi\,[(y^2 + 2yk + k^2)\cos^2\varphi - c^2]}{\sqrt{[(x^2 + 2xh + h^2)\sin^2\varphi - c^2]\,[(y^2 + 2yk + k^2)\cos^2\varphi - c^2]}}$$

$$= -\frac{(x + h\sin\varphi)(2h + k\cos\varphi)\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{(2c + h\sin\varphi)(2c + k\cos\varphi)\sin\varphi\cos\varphi}}; = c\sqrt{\sin\varphi}\cos\varphi.$$

$z = 0$ ist demnach weder ein Maximum noch ein Minimum, wohl aber ein Grenawerth, wie dies sich ergiebt, wenn wir in die Gleichung (16) $z + \Delta z$ statt z, $x + k\,\delta x$ statt x und $y + k\,\delta y$ statt y setzen und nach Potenzen von k ordnen, wenn vorher noch $z = 0$, $x = \pm\frac{c}{\sin\varphi}$ und $y = \pm\frac{c}{\cos\varphi}$ gesetzt ist;

$$\Delta z = \pm\frac{k}{c}\sqrt{\sin\varphi}\cos\varphi\,\delta x\,\delta y\,[4c^2 + 2ck(\sin\varphi\,\delta x + \cos\varphi\,\delta y) + k^2\sin^2\varphi\cos\varphi\,\delta x\,\delta y]$$

Da das Zeichen der Wurzelgrösse nur vom 1. Gliede abhängt, so ist Δz imaginär, wenn δx und δy entgegengesetzte Zeichen haben. Nimmt also $x = \pm\frac{c}{\sin\varphi}$ zu, so kann $y = \pm\frac{c}{\cos\varphi}$ nicht abnehmen, wie wir dies schon oben (pag. 2) bemerkt haben.

Wird eine der beiden andern Veränderlichen z. B. x als Function von y und z angesehen und demgemäss differentiirt, so wird:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{c^2 y z^2\cos^2\varphi}{x\sin^2\varphi\,(y^2\cos^2\varphi - c^2)^2}$$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{c^2 z}{x\sin^2\varphi\,(y^2\cos^2\varphi - c^2)}$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{c^2 z^2\cos^2\varphi\,x\sin^2\varphi\,(y^2\cos^2\varphi - c^2)^2 - \frac{dx}{dy}\,c^2 y z^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,(y^2\cos^2\varphi - c^2)^2}{x^2\sin^2\varphi\,[y^2\cos^2\varphi - c^2]^4}$$

$$-\frac{4c^2 x y^2 z^2\sin^2\varphi\cos^4\varphi\,(y^2\cos^2\varphi - c^2)}{x^2\sin^4\varphi\,(y^2\cos^2\varphi - c^2)^4};$$

$$= -\frac{c^2 z^2\cos^2\varphi\,[x^2\sin^2\varphi\,(y^2\cos^2\varphi - c^2)^2 + c^2 y^2 z^2\cos^2\varphi - 4x^2 y^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,(y^2\cos^2\varphi - c^2)]}{x^3\sin^4\varphi\,(y^2\cos^2\varphi - c^2)^4}$$

$$\frac{d^2 x}{d z\, d y} = - \frac{c^2 z \sin^2\varphi (y^2\cos^2\varphi - c^2)\frac{dx}{dy} + 2c^2 x y z \sin^2\varphi\cos^2\varphi}{x^2\sin^4\varphi (y^2\cos^2\varphi - c^2)^2}$$

$$= - \frac{c^2 y z \cos^2\varphi [x^2\sin^2\varphi + c^2]}{x^3\sin^4\varphi (y^2\cos^2\varphi - c^2)^2};$$

$$\frac{d^2 x}{d z^2} = \frac{c^2 [x\sin^2\varphi (y^2\cos^2\varphi - c^2) - z\sin^2\varphi (y^2\cos^2\varphi - c^2)]\frac{dx}{dz}}{x^2\sin^4\varphi (y^2\cos^2\varphi - c^2)^2};$$

$$= \frac{c^2 [x^2\sin^2\varphi (y^2\cos^2\varphi - c^2) - c^2 z^2]}{x^3\sin^4\varphi (y^2\cos^2\varphi - c^2)^2} = \frac{c^4}{x^3\sin^4\varphi (y^2\cos^2\varphi - c^2)};$$

Wird $\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dz} = 0$ gesetzt, so erhält man $z = 0$; alsdann auch $\frac{d^2 x}{dy^2}$ und $\frac{d^2 x}{dz\, dy} = 0$. Da aus Gleichung (16) für jeden Werth von y, wenn $z = 0$, folgt $x = \pm \frac{c}{\sin\varphi}$ so wird $\frac{d^2 x}{dz^2} = \pm \frac{c^4}{\sin\varphi (y^2\cos^2\varphi - c^2)}$. Das Zeichen von $\frac{d^2 x}{dz^2}$ hängt also nicht allein von x ab, sondern auch davon, ob $y^2 <$ oder $> \frac{c^2}{\cos^2\varphi}$. Für $y^2 > \frac{c^2}{\cos^2\varphi}$ hat $\frac{d^2 x}{dz^2}$ dasselbe Zeichen wie x, für $y^2 < \frac{c^2}{\cos^2\varphi}$ das entgegengesetzte Zeichen von x; d. h. die x-Ordinate hat weder ein Maximum noch ein Minimum. Ein analoges Resultat erhält man für die y-Ordinate, wenn y als Function von x und z betrachtet wird.

Die Fläche hat hiernach nur für die z-Ordinate, und zwar nicht mehrere, sondern nur ein Maximum und ein Minimum.

f. Krümmungslinien und Krümmungshalbmesser der Fläche.

Lassen wir jetzt einen Punkt sich auf der Fläche derartig bewegen, dass für ihn die unendlich nahen Normalen der Fläche sich schneiden, und der Punkt selbst nie rechtwinklig von der ersten Richtung ablenkt, so beschreibt derselbe auf der Fläche eine Linie, die man nach Monge die Krümmungscurve der Fläche genannt hat. Sind die Coordinaten dieses Punktes x, y z, die eines ihm unendlich nahen Punktes $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, so sind die Gleichungen der Normalen dieser beiden Punkte:

$$(35) \quad \begin{cases} x - a + \frac{dz}{dx}(z - c) = 0; \\ y - b + \frac{dz}{dy}(z - c) = 0; \end{cases}$$

$$(36) \quad \begin{cases} x + dx - a, + \frac{d[z + dz]}{dx}(z + dz - c,) = 0; \\ y + dy - b, + \frac{d(z + dz)}{dy}(z + dz - c,) = 0; \end{cases}$$

Sollen diese beiden Normalen sich schneiden, so müssen die Schnittpunktscoordinaten beiden Gleichungen genügen; nehmen wir also $a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$, so sind diese Punkte zusammenfallend, d. h. die Normalien schneiden sich in: a, b, c.

Subtrahiren wir (35) von (36) so wird

$$(37) \quad \begin{cases} dx + dz \cdot \frac{dz}{dx} + d \cdot \frac{dz}{dx}(z + dz - c) = 0 \\ dy + dz \cdot \frac{dz}{dy} + d \cdot \frac{dz}{dy}(z + dz - c) = 0. \end{cases}$$

Eliminiren wir $(z + dz - c)$ aus diesen Gleichungen, so ist:

$$(38) \quad \ldots \left(dx + dz \cdot \frac{dz}{dx}\right) d \cdot \frac{dz}{dy} - \left(dy + dz \cdot \frac{dz}{dy}\right) d \cdot \frac{dz}{dx} = 0.$$

Da aber $dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy$, $d \cdot \frac{dz}{dy} = \frac{d^2 z}{dy^2} dy + \frac{d^2 z}{dx\,dy} dx$, $d \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{d^2 z}{dx^2} dx + \frac{d^2 z}{dx\,dy} dy$, so ergiebt sich, wenn wir noch durch dx dividiren und für die Differentialquotienten die bekannten Zeichen p, q, r, s, t setzen:

$$(39) \quad \ldots \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 [pqt - (1 + q^2)\,s] + \frac{dy}{dx} [(1 + p^2)\,t - (1 + q^2)\,r] + [(1 + p^2)\,s - pqr] = 0.$$

als die Differentialgleichung der Projection der Krümmungslinie auf xy-Ebene, welche in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ von der ersten Ordnung, aber vom zweiten Gerade ist. Setzen wir die Seite 8 gefundenen Werthe für p, q, r, s und t in diese Gleichung ein, so erhalten wir:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \frac{x\,y \sin^2\varphi \cos^2\varphi [c^4 (1 + \cos^2\varphi) - \sin^2\varphi \cos^2\varphi (x^2 y^2 \cos^2\varphi + c^2 x^2 + c^2 y^2)]}{c^4 z (y^2 \cos^2\varphi - c^2)}$$

$$(40) \quad + \frac{dy}{dx} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{c^4 [x^2 (1 + \cos^2\varphi) - y^2 (1 + \sin^2\varphi)] \sin^2\varphi \cos^2\varphi - c^6 (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}{c^4 z^3} \\ \dfrac{- x^2 y^2 \sin^4\varphi \cos^4\varphi (x^2 \sin^2\varphi - y^2 \cos^2\varphi) + c^2 \sin^4\varphi \cos^4\varphi (x^4 - y^4)}{c^4 z^3} \end{array} \right\}$$

$$+ \frac{x\,y \sin^2\varphi \cos^2\varphi [\sin^2\varphi \cos^2\varphi (x^2 y^2 \sin^2\varphi + c^2 x^2 + c^2 y^2) - c^4 (1 + \sin^2\varphi)]}{c^4 z (x^2 \sin^2\varphi - c^2)} = 0;$$

oder

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \left\{ x\,y \sin^2\varphi \cos^2\varphi (x^2 \sin^2\varphi - c^2) [c^4 (1 + \cos^2\varphi) - \sin^2\varphi \cos^2\varphi (x^2 y^2 \cos^2\varphi + c^2 x^2 + c^2 y^2)] \right\}$$

$$(41) \quad + \frac{dy}{dx} \left\{ \begin{array}{l} c^6 [x^2 (1 + \cos^2\varphi) - y^2 (1 + \sin^2\varphi)] \sin^2\varphi \cos^2\varphi - c^8 (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \\ - \sin^4\varphi \cos^4\varphi [x^2 y^2 (x^2 \sin^2\varphi - y^2 \cos^2\varphi) + c^2 (x^4 - y^4)] \end{array} \right\}$$

$$- x\,y \sin^2\varphi \cos^2\varphi (y^2 \cos^2\varphi - c^2) [c^4 (1 + \cos^2\varphi) - \sin^2\varphi \cos^2\varphi (x^2 y^2 \sin^2\varphi + c^2 x^2 + c^2 y^2)] = 0.$$

Diese Gleichung vereinfacht sich bedeutend, wenn wir uns, wie dies im Folgenden geschehen soll, auf den Fall beschränken, dass die beiden Geraden (1) und (2) sich unter einem rechten Winkel schneiden, das heisst, dass φ in der gegebenen Gleichung $= 45^0$ sei. Dieser besondern Annahme gemäss ist nun

$$\sin\varphi = \cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Mithin geht die Gleichung (41) über in:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 x\,y (x^2 - 2c^2) [12 c^4 - x^2 y^2 - 2 c^2 (x^2 + y^2)] +$$

$$(42) \quad \frac{dy}{dx} 2c^2 [12 c^4 (x^2 - y^2) - x^2 y^2 (x^2 - y^2) - 2 c^2 (x^4 - y^4)] - x\,y (y^2 - 2 c^2) [12 c^4 - x^2 y^2 - 2 c^2 (x^2 + y^2)] = 0.$$

Oder mit Weglassung des Factors: $12 c^4 - x^2 y^2 - 2 c^2 (x + y^2)$.

$$(43) \quad \ldots \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2 \frac{c^2 (x^2 - y^2)}{x\,y (x^2 - 2 c^2)} \frac{dy}{dx} - \frac{y^2 - 2 c^2}{x^2 - 2 c^2} = 0.$$

Und hieraus

$$(44) \quad \ldots \quad \frac{dy}{dx} = \frac{- c^2 (x^2 - y^2) \pm \sqrt{c^4 (x^2 - y^2)^2 + x^2 y^2 (x^2 - 2 c^2) (y^2 - 2 c^2)}}{x\,y (x^2 - 2 c^2)};$$

$$= \frac{- c^2 (x^2 - y^2) \pm [c^2 (x^2 + y^2) - x^2 y^2]}{x\,y (x^2 - 2 c^2)};$$

Demnach

$$(45) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2\,c^2\,y^2 - x^2\,y^2}{xy\,(x^2 - 2\,c^2)} = -\frac{y}{x};$$

$$(46) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2\,y^2 - 2\,c^2\,x^2}{xy\,(x^2 - 2\,c^2)} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y^2 - 2\,c^2}{x^2 - 2\,c^2};$$

die Projection der einen Krümmungslinie auf die xy-Ebene entspricht also der Differentialgleichung:

$$x\,dy + y\,dx = 0;$$

aus welcher durch Integration hervorgeht:

$$(47) \quad xy = \frac{a^2}{2}.$$

Dies ist die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, bezogen auf ihre Asymptoten als Coordinatenaxen. Es liefert demnach Gleichung (47) als Projectionen des einen Systems auf die xy-Ebene gleichseitige Hyperbeln, deren Axen in die Geraden (1) und (2) und deren Asymptoten in die x- und y-Axe fallen.

Der andere Werth von $\frac{dy}{dx}$ giebt die Differentialgleichung:

$$\frac{y\,dy}{y^2 - 2\,c^2} = \frac{x\,dx}{x^2 - 2\,c^2};$$

aus welcher durch Integration wird:

$$(48) \quad \frac{1}{2}\,l\,(y^2 - 2\,c^2) = \frac{1}{2}\,l\,(x^2 - 2\,c^2) + l\,C$$

$$\text{oder:} \quad y^2 - 2\,c^2 = b\,(x^2 - 2\,c^2).$$

Dies ist die Gleichung eines Systems von Hyperbeln oder Ellipsen, je nachdem die Integrationsconstante b positiv oder negativ. Da der Kegelschnitt, welchen Werth auch b haben möge, immer durch die Eckpunkte des Quadrats gehen muss, in welches sich das oben mehrfach erwähnte Rechteck für den besonderen Fall $\varphi = \frac{\pi}{4}$ verwandelt, so kann derselbe nie eine Ellipse sein, demnach muss b positiv sein, wie dies auch später noch sich zeigen wird.

Um ein genaues Bild der Krümmungslinien zu erhalten, entwickeln wir noch die Gleichungen für die Projection derselben auf eine andere der Coordinaten-Ebene, etwa die yz-Ebene. Für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ werden die Differentialquotienten (pag. 9 und 10):

$$p = -\frac{y}{x} \cdot \frac{x^2 - 2\,c^2}{y^2 - 2\,c^2}; \quad q = \frac{4\,c^2\,z}{x\,(y^2 - 2\,c^2)}; \quad r = \frac{2\,(x^2 - 2\,c^2)\,(x^2\,y^2 + c^2\,x^2 + c^2\,y^2)}{x^3\,(y^2 - 2\,c^2)}$$

$$s = -\frac{4\,c^2\,y\,z}{x^3\,(y^2 - 2\,c^2)^2} \cdot (x^2 + 2\,c^2); \quad t = \frac{8\,c^4}{x^3\,(y^2 - 2\,c^2)};$$

Setzen wir diese Werthe in Gleichung (39) ein und schreiben statt $\frac{dy}{dx}$ jetzt $\frac{dz}{dy}$, so ergiebt sich als die Differentialgleichung der Projection der Krümmungslinien auf die yz-Ebene:

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 \frac{16\,c^4\,y\,z\,[(y^2 + 2\,c^2)\,z^2 + (y^2 - 2\,c^2)^2]}{x^3\,(y^2 - 2\,c^2)^4} -$$

$$(49) \quad \frac{dz}{dy} \frac{8\,c^4\,[(y^2 + 2\,c^2)\,z^2 + (y^2 - 2\,c^2)^2] \cdot [4\,(y^2 + 2\,c^2)\,z^2 - (y^2 - 2\,c^2)^2]}{x^3\,(y^2 - 2\,c^2)^5}$$

$$+ \frac{16\,c^4\,y\,z\,[(y^2 + 2\,c^2)\,z^2 + (y^2 - 2\,c^2)^2] \cdot [4\,c^2\,z^2 - (y^2 - 2\,c^2)^2]}{x^3\,(y^2 - 2\,c^2)^6} = 0$$

und mit Unterdrückung des Factors: $\frac{8\,c^4\,[(y^2 + 2\,c^2)\,z^2 + (y^2 - 2\,c^2)^2]}{x^3\,(y^2 - 2\,c^2)^4}$.

$$(50)\quad \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 - \frac{4\,(z^2+2\,c^2)\,z^2 - (y^2-2\,c^2)^2}{2\,yz\,(y^2-2\,c^2)}\,\frac{dz}{dy} + \frac{4\,c^2 z^2 - (y^2-2\,c^2)^2}{(y^2-2\,c^2)^2} = 0;$$

mithin:

$$(51)\quad \frac{dz}{dy} = \frac{4\,(y^2+2\,c^2)\,z^2 - (y^2-2\,c^2)^2 \pm \sqrt{[4\,(y^2+2\,c^2)\,z^2 - (y^2-2\,c^2)^2]^2 - 64\,c^2 y^2 z^4 + 16\,y^2 z^2 (y^2-2\,c^2)}}{4\,yz\,(y^2-2\,c^2)}$$

$$= \frac{4\,(y^2+2\,c^2)\,z^2 - (y^2-2\,c^2)^2 \pm [4\,(y^2-2\,c^2)\,z^2 + (y^2-2\,c^2)^2]}{4\,yz\,(y^2-2\,c^2)}$$

Demnach

$$(52)\quad \frac{dz}{dy} = \frac{8\,y^2 z^2}{4\,yz\,(y^2-2\,c^2)} = \frac{2\,yz}{y^2-2\,c^2};$$

$$(53)\quad \frac{dz}{dy} = \frac{8\,c^2 z^2 - 2\,(y^2-2\,c^2)^2}{4\,yz\,(y^2-2\,c^2)} = \frac{4\,c^2 z^2 - (y^2-2\,c^2)^2}{2\,yz\,(y^2-2\,c^2)};$$

die Projection des einen Systems entspricht hiernach der Differentialgleichung

$$\frac{dz}{z} = \frac{2\,y\,dy}{y^2-2\,c^2},$$

durch deren Integration sich ergiebt:

$$lz + lC = l\,(y^2-2\,c^2)$$

also

$$(54)\quad Az = y^2 - 2\,c^2.$$

Dies ist die Gleichung eines Systems von Parabeln, deren Axen in die z-Axe fallen und welche sämmtlich die y-Axe in denselben Punkten schneiden, da, wenn $z = 0$, $y = \pm\, c\,\sqrt{2}$ ist, welcher Werth auch immer der Integrationsconstanten A beigelegt werden mag.

Zur Bestimmung des Systems der zweiten Krümmungslinien haben wir oben (53) erhalten:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{4\,c^2 z^2 - (y^2-2\,c^2)^2}{2\,yz\,(y^2-2\,c^2)}.$$

Um diese Differentialgleichung zu integriren, führen wir neue Veränderliche ξ, η ein durch die Relationen

$$\eta = y^2; \quad \xi = z^2;$$

in Folge dessen geht die Gleichung (53) über in:

$$\frac{d\xi\sqrt{\eta}}{d\eta\sqrt{\xi}} = \frac{4\,c\,\xi - (\eta-2\,c^2)^2}{2\,\sqrt{\xi\,\eta}\,(\eta-2\,c^2)};$$

hieraus folgt:

$$(55)\quad d\xi = \frac{2\,c^2\,\xi}{\eta\,(\eta-c^2)}\,d\eta - \frac{\eta-2\,c^2}{2\,\eta}\,d\eta$$

für welche Gleichung noch, wenn der Kürze wegen gesetzt wird:

$$P = -\frac{2\,c^2}{\eta\,(\eta-2\,c^2)} \text{ und } q = \frac{\eta-2\,c^2}{2\,\eta}$$

geschrieben werden kann:

$$(56)\quad d\xi + \xi\,P\,d\eta + q\,d\eta = 0.$$

Das Integral einer lineären Differentialgleichung der ersten Ordnung von der vorstehenden Form ist, wenn P und q Functionen von η allein sind:

$$\xi = -\,e^{-\int P\,d\eta}\left(\int e^{\int P\,d\eta}\,q\,d\eta - c\right)$$

$$\int P\,d\eta = -\int \frac{2\,c^2}{\eta\,(\eta-2\,c^2)}\,d\eta = -\int \frac{\eta+2\,c^2-\eta}{\eta\,(\eta-2c^2)}\,d\eta$$

$$= \int \frac{d\eta}{\eta} - \int \frac{d\eta}{\eta - 2c^2} = l \frac{\eta}{\eta - 2c^2}$$

$$e^{-\int P\, d\eta} = \frac{\eta - 2c^2}{\eta}; \quad e^{\int P\, d\eta} = \frac{\eta}{\eta - 2c^2}.$$

$$\int e^{\int P\, d\eta} q\, d\eta = \int \frac{1}{2}\, d\eta = \frac{1}{2}\, \eta.$$

Diese Werthe eingesetzt, so wird:

$$\xi = \frac{\eta - 2c^2}{\eta}\left(C - \frac{1}{2}\,\eta\right) = \frac{(\eta - 2c^2)(C_1 - \eta)}{2\eta}$$

also

(57) . . . . . $2z^2 y^2 = (y^2 - 2c^2)(B^2 - y^2)$.

Als Projectionen des andern Systems der Krümmungslinien auf die yz-Ebene erhalten wir demnach ein System von Linien 4. Grades, welche aus 2 getrennten Theilen, die zur z-Axe symmetrisch liegen und beide von der y-Axe halbirt werden, bestehen und die y-Axe, wie beschaffen auch B^2 sein möge, in den beiden festen Punkten $y = \pm c\sqrt{2}$ schneiden, die beiden andern Schnittpunkte hängen von dem Werthe von B^2 ab: $y = \pm B$.

Um nun festzustellen, welche zwei von den gefundenen vier Gleichungen einem und demselben Systeme von Krümmungslinien angehören, und zu ersehen, welche Beziehungen zwischen den einzelnen Integrationsconstanten stattfinden, brauchen wir nur zu untersuchen, durch welche Zusammenstellung von zweien der vier Gleichungen die Gleichung der Fläche

(58) . . . . . $4c^2 z^2 = (x^2 - 2c^2)(y^2 - 2c^2)$

befriedigt werden kann.

Dies ist nur möglich durch Combination einerseits der Gleichung (47) mit der Gleichung (57) und andererseits der Gleichung (48) mit der Gleichung (54). Denn aus Gleichung (47) $y^2 = \frac{a^4}{4x^2}$ in die Gleichung (57) eingesetzt, ergiebt:

$$\frac{a^4 z^2}{2x^2} = (y^2 - 2c^2)\left(B^2 - \frac{a^4}{4x^2}\right) \text{ oder}$$

$$2a^4 z^2 = (y^2 - 2c^2)(4B^2 x^2 - a^4) \text{ oder}$$

$$2z^2 = (y^2 - 2c^2)\left(4\frac{B^2}{a^4} x^2 - 1\right) \text{ und endlich}$$

$$2c^2 z^2 = (y^2 - 2c^2)\left(8\frac{B^2 c^2}{a^4} x^2 - 2c^2\right).$$

Soll diese Gleichung mit der Gleichung (58) der Fläche identisch sein, so muss sein: $8B^2 c^2 = a^4$; mithin $a^2 = \pm 2cB\sqrt{2}$. Die Gleichung (47) stellt also ein System conjugirter gleichseitiger Hyperbeln dar; die reellen Durchmesser des einen Systems sind die Nebendurchmesser des andern. Für positive Werthe von a^2 ist der reelle Durchmesser die Gerade (1), für negative Werthe von a^2 die Gerade (2).

Multipliciren wir Gleichung (48) mit $y^2 - 2c^2$, quadriren Gleichung (54) und setzen dann aus Gleichung (54) in Gleichung (48) den Werth für $(y^2 - 2c^2)$ ein, so erhalten wir:

$$A^2 z^2 = b(x^2 - 2c^2)(y^2 - 2c^2) = 4bc^2 z^2;$$

mithin $b = \frac{A^2}{4c^2}$.

Hieraus erhellt, dass das durch Gleichung (48) dargestellte System 2. Grades nur Hyperbeln sind, weil die Gleichung (54), wenn z auf reelle — positive oder negative — Werthe beschränkt ist, für A keine imaginaire Werthe liefern kann. Fassen wir das vorstehende zusammen, so erhalten wir die Gleichungen:

$$xy = \pm \frac{a^2}{2}$$

(59) . . . . . $16\ c^2\ y^2\ z^2 = (y^2 - 2\ c^2)\ (a^4 - 8\ c^2\ y^2)$

für das eine System und

$$A^2\ (x^2 - 2\ c^2) = 4\ c^2\ (y^2 - 2\ c^2)$$

(60) . . . . . $A\ z = y^2 - 2\ c^2$

für das andere System der Krümmungslinien.

Während die Linien des letzten Systems von dem einen Theile der Fläche auf den andern (cf. pag. 12) durch die Punkte $x^2 = y^2 = 2\ c^2$, $z^2 = 0$ übergehen, liegen die Linien des andern Systems auf beiden Theilen getrennt. Für $a^4 < 16\ c^4$ gehören dieselben nur Γ_0, für $a^4 > 16\ c^4$ nur Γ_1 an. Für $a^4 = 16\ c^4$ schrumpfen die Arme der hyperbolischen Projection in ihre Scheitelpunkte zusammen: $x^2 = y^2 = 2\ c^2$, ebenso die Linie 4. Grades in die Punkte $y^2 = 2\ c^2$, $z^2 = 0$; d. h. die Krümmungslinie selbst schrumpft in einen der 4 Punkte $x^2 = y^2 = 2\ c^2$, $z^2 = 0$ zusammen. Wird $a^4 = 0$, so fallen die Scheitelpunkte der Hyperbel in dem Mittelpunkt der Fläche, die Hyperbel selbst geht, wenn $x = 0$, in die y-Axe, und die Gleichung der Linien 4. Grades über in:

$$2\ z^2 + y^2 - 2\ c^2 = 0; \quad \text{oder} \quad \frac{y^2}{2\ c^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

d. h. die Linie 4. Grades geht in eine Ellipse über, welche der Schnitt der yz-Ebene mit der Fläche ist (cf. pag. 3). Für $y = 0$, geht die Hyperbel in die x-Axe, die Linie 4. Grades in die z-Axe über; dieses sind die Projectionen des durch die xz-Ebene gelegten Schnittes (cf. ibid.). Wird $a^4 = \infty$, so wird die hyperbolische Projection eine Gerade, die parallel (1) oder (2) ist; die Linie 4. Grades wird in 2 Ellipsen mit ∞ grossen Axen, d. h. in 2 Kreise übergehen, die zur z-Axe symmetrisch liegen und die y-Axe in $+$ oder $-\ c\sqrt{2}$ schneiden.

Formen wir die Gleichung der hyperbolischen Projection des Systems (60) um in:

$$\frac{x^2}{\frac{2\ c^2\ (A^2 - 4\ c^2)}{A^2}} - \frac{y^2}{\frac{2\ c^2\ (A^2 - 4\ c^2)}{4\ c^2}} - 1 = 0;$$

so ersieht man, dass diese Gleichung 2 Systeme von Hyperbeln darstellt, welche denselben Mittelpunkt haben, und deren reelle Axe in die x-Axe fällt, wenn $A^2 > 4\ c^2$, dagegen in die y-Axe, wenn $A^2 < 4\ c^2$ genommen wird. Diese beiden Systeme schneiden sich derartig, dass ein Zweig des einen Systems beide Zweige des andern Systems in denselben Punkten, welche Γ_0 und Γ_1 gemeinsam haben, durchschneiden.

Für $A^2 = 4\ c^2$ werden beide Axen $= 0$ und die Gleichung reducirt sich auf

$$x^2 - y^2 = 0,$$

welche in die beiden folgenden zerfällt:

$$x - y = 0, \quad \text{und} \quad x + y = 0;$$

d. h. für $A^2 = 4\ c^2$ degeneriren beide hyperbolischen Systeme in dasselbe System von zwei im Coordinaten-Anfangspunkte sich schneidenden Geraden, welches das der beiden Geraden (1) und (2) ist. Die Gleichung der parabolischen Projection wird in diesem Falle, wenn z dem absoluten Betrage nach genommen wird:

$$y^2 = 2\ c\ (c - z);$$

d. h. von den beiden Parabeln, die durch diese Gleichung dargestellt sind, schneidet die eine die z-Axe in dem Punkte: $+\ c$; die andere in: $-\ c$; beide schneiden die y-Axe in: $y = \pm\ c\sqrt{2}$. Die Gleichungen (60) gehören demnach für $A^2 = 4\ c^2$ den Schnitten an, die durch die z-Axe und die Geraden (1) und (2) gelegt sind (cf. pag. 8 d.). Wird $A^2 = \infty$, so erreicht die reelle Axe des einen Systems ihren grössten Werth, nämlich $x = 2\ c\sqrt{2}$, während die Nebenaxe ∞ wird; d. h. die Hyperbel degenerirt in ein System zweier, der y-Axe parallelen Geraden [cf. Gleichung (25)]. Wird $A^2 = 0$, so erreicht die reelle Axe des andern Systems ihren grössten Werth, nämlich $y = 2\ c\sqrt{2}$, während die Nebenaxe ∞ wird; d. h. die Hyperbel degenerirt in ein System zweier, der x-Axe parallelen Geraden [cf. Gleichung (26)]. Für die parabolische Projection wird in beiden Fällen die Gleichung: $z = 0$. Für alle Punkte also, welche auf einer der vier Geraden liegt, in welchen die Fläche durch die xy-Ebene geschnitten wird, ist die eine Krümmungslinie die betreffende Gerade selbst, mit Ausnahme der Schnittpunkte jener 4 Geraden, durch welche unendlich viele Krümmungslinien gehen.

Für die beiden Hauptwerthe des Krümmungshalbmesser ergiebt sich ein ziemlich einfacher Ausdruck. Setzen wir die oben (pag. 9) erhaltenen Werthe in die bekannte Gleichung ein;

$$R = \sqrt{p^2+q^2+1}\,.\,\frac{(1+q^2)\,r - 2\,pqs + (1+p^2)\,t \pm \sqrt{[(1+q^2)\,r - 2\,pqs + (1+p^2)\,t]^2 - 4\,(p^2+q^2+1)\,(rt-s^2)}}{2\,(rt-s^2)}$$

wenn noch $\sin\varphi = \cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ gesetzt wird, so erhalten wir:

$$(61)\quad \ldots\ldots R = \frac{\sqrt{4\,c^4 - x^2\,y^2}\,.\,\sqrt{4\,c^2 - (x^2+y^2)}}{4\,c^2\,z}\,.\,\frac{16\,c^4\,z^2}{2\,(4\,c^4 - x^2\,y^2)}\,.$$
$$\frac{\left\{\begin{array}{l} -\,x^4\,y^4 + c^2\,x^2\,y^2\,(x^2+y^2) - 2\,c^4\,(x^4+y^4) + 12\,c^6\,(x^2+y^2) - 32\,c^8 \\ \pm\,[x^4\,y^4 + c^2\,x^2\,y^2\,(x^2+y^2) - 2\,c^4\,(x^4+y^4) - 16\,c^4\,x^2\,y^2 + 12\,c^6\,(x^2+y^2)] \end{array}\right\}}{32\,c^6\,z^3}$$

mithin

$$(62)\quad .\ R_1 = \frac{\sqrt{4\,c^2 - (x^2+y^2)}\,[2\,c^2\,x^2\,y^2\,(x^2+y^2) - 4\,c^4\,(x^4+y^4) + 24\,c^6\,(x^2+y^2) - 16\,c^4\,x^2\,y^2 - 32\,c^8]}{16\,c^4\,z^2\,\sqrt{4\,c^4 - x^2\,y^2}};$$

$$= \frac{[x^2\,y^2 - 2\,c^2\,(x^2+y^2) + 4\,c^4]\,[x^2+y^2-4\,c^2]\,\sqrt{4\,c^2 - (x^2+y^2)}}{8\,c^2\,z^2\,\sqrt{4\,c^4 - x^2\,y^2}};$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{[4\,c^2 - (x^2+y^2)]^{\frac{3}{2}}}{[4\,c^4 - x^2\,y^2]^{\frac{1}{2}}}\,.$$

und

$$(63)\quad .\ R_2 = \frac{\sqrt{4\,c^2 - (x^2+y^2)}\,.\,\sqrt{4\,c^4 - x^2\,y^2}}{4\,c^2\,z}\,.\,\frac{-\,2\,x^4\,y^4 + 16\,c^4\,x^2\,y^2 - 32\,c^8}{4\,c^2\,z\,(4\,c^4 - x^2\,y^2)};$$

$$= -\frac{\sqrt{4\,c^2 - (x^2+y^2)}\,\sqrt{4\,c^4 - x^2\,y^2}\,[4\,c^4 - x^2\,y^2]}{8\,c^4\,z^2};$$

$$= -\frac{[4\,c^2 - (x^2+y^2)]^{\frac{1}{2}}\,[4\,c^4 - x^2\,y^2]^{\frac{3}{2}}}{2\,c\,(x^2 - 2\,c^2)\,(y^2 - 2\,c^2)};$$

Die beiden Hauptwerthe des Krümmungshalbmessers werden einander gleich und von gleichen Vorzeichen sein, wenn die letzte Wurzelgrösse in der allgemeinen Gleichung $= 0$ ist. Diese Bedingung wird in der Gleichung (61) erfüllt, wenn entweder $x = y = 0$, $z = \pm c$, oder $x^2 = y^2 = 2\,c^2$, $z = 0$ ist. Im ersten Falle sind dieselben $= +2\,c$ oder $-2\,c$, je nachdem $z = +$ oder $-\,c$ ist; im zweiten Falle stellen sie sich unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ dar. Um zu ersehen, ob in diesem Falle die beiden Hauptwerthe wirklich einander gleich sind, ist es nöthig, die Grenze zu untersuchen, welcher die beiden Brüche

$$\frac{[4\,c^2 - (x^2+y^2)]^{\frac{3}{2}}}{2\,[4\,c^4 - x^2\,y^2]^{\frac{1}{2}}} \quad \text{und} \quad \frac{[4\,c^2 - (x^2+y^2)]^{\frac{1}{2}}\,[4\,c^4 - x^2\,y^2]^{\frac{3}{2}}}{2\,c^2\,(x^2 - 2\,c^2)\,(y^2 - 2\,c^2)}$$

sich nähern, während x^2 und y^2 sich dem Werthe $2\,c^2$ immer mehr nähern. Da der Taylor'sche Satz hier nicht anwendbar ist, so setzen wir, wenn wir unter h eine unendlich kleine Grösse, welche gegen die Null convergirt, verstehen, $x = y = c\sqrt{2} \mp h$; alsdann wird

$$R_1 = \frac{[4\,c^2 - (4\,c^2 - 4\,c\,h\,\sqrt{2} + 2\,h^2)]^{\frac{3}{2}}}{2\,[4\,c^4 - (4\,c^4 - 8\,c^3\,\sqrt{2}\,h + 12\,c^2\,h^2 - 4\,c\,\sqrt{2}\,h^3 + h^4)]^{\frac{1}{2}}};$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,[2\,c\,\sqrt{2} - h]^{\frac{3}{2}}\,h}{[8\,c^3\,\sqrt{2} - 12\,c^2\,h + 4\,c\,\sqrt{2}\,h^2 - h^3]^{\frac{1}{2}}};$$

mithin $\lim R_1 = 0$. Der andere Werth wird:

$$R_2 = \frac{\sqrt{2}\,[2\,c\sqrt{2} - h]^{\frac{1}{2}}\sqrt{h}\,.\,[8\,c^3\sqrt{2} - 12\,c^2\,h + 4\,c\sqrt{2}\,h^2 - h^3]^{\frac{3}{2}}\,h\sqrt{h}}{2\,c^2\,h^2\,(2\,c\sqrt{2} - h)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2\,c^2}\,(4\,c^2 - 2\,c\sqrt{2}\,h + h^2)^{\frac{3}{2}};$$

mithin $\lim R_2 = \frac{\sqrt{2}}{2\,c^2}\,(4\,c^2)^{\frac{3}{2}} = 4\,c\sqrt{2}.$

$R_1 = 0$ ist der Krümmungshalbmesser der Fläche für den Punkt $x^2 = y^2 = 2\,c^2$, $z = 0$ in Bezug auf die Krümmungslinie des Systems (59), wenn $a^4 = 16\,c^4$ ist; R_2 in Bezug auf das System (60), und zwar ist dies gleichzeitig der Halbmesser für die Krümmung der Kurve, die sich für $A^2 = 4\,c^2$ ergiebt. Denn differentiiren wir die Gleichung dieser Kurve in der Form, in der wir sie (33) und (34) erhalten haben, indem wir noch $\sin^2\varphi = 1$ setzen, so wird:

$$\frac{d\,z}{d\,x_1} = -\frac{x_1}{2\,c};\quad \frac{d^2\,z}{d\,x_1^2} = -\frac{1}{2\,c};$$

diese Werthe in die Formel für den Krümmungsradius einer Kurve eingesetzt:

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{d\,z}{d\,x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2\,z}{d\,x^2}} = 4\,c\sqrt{2},$$

da $x_1^2 = 4\,c^2$ ist, wenn $z = 0$ (cf. (33) und (34)).

Hiernach ist also die Annahme der Gleichheit der beiden Hauptwerthe des Krümmungshalbmessers für die Punkte: $x^2 = y^2 = 2\,c^2$, $z = 0$ zu verwerfen. Demnach enthält die Fläche nur 2 Punkte, Nabelpunkte genannt, für welche die beiden Hauptwerthe des Krümmungshalbmessers einander gleich und von einerlei Richtung sind; und da für diese Punkte der Abstand $= 2\,c$, also gleich dem Krümmungshalbmesser ist, so ist der eine Punkt der Krümmungsmittelpunkt des andern. Durch die beiden Nabelpunkte der Fläche gehen, wie wir oben (pag. 13 und 14) gesehen haben, vier Krümmungslinien, von denen je zwei sich rechtwinklig schneiden und deren Gleichungen sind:

$$x\,y = 0,\ \frac{y^2}{2\,c^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0;$$

$$x\,y = 0;\ \frac{x^2}{2\,c^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0;$$

für das eine orthogonale System.

$$x - y = 0;\ y^2 = 2\,c\,(c \mp z);\ \text{und}$$
$$x + y = 0;\ y^2 = 2\,c\,(c \mp z);$$

für das andere orthogonale System.

Diese 4 Linien sind zugleich kürzeste Linien auf der Fläche, da die Schmiegungsebenen für sämmtliche Punkte der Kurve in eine und dieselbe fallen, nämlich in die, durch deren Schnitt mit der Fläche die betreffende Kurve erzeugt wird, und die Normalen der Kurve auch die der Fläche sind.

g. Krümmung der Fläche.

Die Art der Krümmung einer Fläche hängt bekanntlich von dem Werthe ab, den der Ausdruck $rt - s^2$ in der allgemeinen Gleichung der Hauptwerthe des Krümmungshalbmessers annimmt.

Ist $rt - s^2$ positiv, so sind, da die letzte Wurzelgrösse in jener Gleichung kleiner als die vor ihr stehende Grösse ist, die beiden Hauptwerthe gleichzeitig entweder positiv oder negativ, also die Krümmungshalbmesser von gleicher Richtung; ist jener Ausdruck dagegen negativ, so wird die Wurzelgrösse grösser als die vor ihr stehende Grösse, und in Folge dessen bekommen die beiden Hauptwerthe entgegengesetzte Zeichen, mithin die Krümmungshalb-

messer auch entgegengesetzte Richtung. Demgemäss wenden alle Normalschnitte im ersten Fall ihre Krümmung nach ein- und derselben Seite, im zweiten Falle nach entgegengesetzter Seite, d. h. die Krümmung ist im ersten Falle gleichartig, im zweiten ungleichartig.

Ist endlich $rt - s^2 = 0$, so wird der eine Hauptwerth im Allgemeinen unendlich gross, mithin die Krümmung unendlich klein, d. h. die Krümmung der Fläche hat im Allgemeinen in der Richtung der Linien, für deren Punkte die Relation stattfindet

$$rt - s^2 = 0$$

den Werth Null.

Nun ist für unsere Fläche nach pag. 8 c.

$$rt - s^2 = \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,(c^4 - x^2y^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi)}{c^4 z^2};$$

und es ist demnach dieser Ausdruck positiv oder negativ, je nachdem $x^2 y^2 <$ od. $> \frac{c^4}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}$ ist; d. h. je nachdem die Summe oder die Differenz der Abstände eines Punktes der Fläche von den beiden Geraden (1) und (2) $= 2c$ ist. Demnach ist Γ_0 von gleichartiger, dagegen Γ_1 von ungleichartiger Krümmung. Γ_1 ist gegen die xy-Ebene mit Bezug auf das System (59) concav, in Bezug auf das System (60) convex gekrümmt.

Verschwinden würde die Krümmung längst den Linien, für deren Punkte obiger Bedingung zufolge: $xy = \pm \frac{c^2}{\sin\varphi\cos\varphi}$; diese erfüllen aber nnr die Schnittpunkte jener 4 Geraden, in welchen die xy-Ebene die Fläche durchsetzt und für diese ist die Krümmung, wie wir oben (pag. 16) gesehen, nicht gleich Null. Aus der Gleichung (51) erhellt jedoch, dass R_2 sowohl, wenn $x^2 = \frac{c^2}{\sin^2\varphi}$, als auch, wenn $y^2 = \frac{c^2}{\cos^2\varphi}$ ist, unendlich gross wird; diesen resp. Bedingungen genügen aber alle die Punkte, welche auf einem der beiden Systeme paralleler Geraden liegen, in welchen die Fläche durch die xy-Ebene geschnitten wird. In der Richtung dieser Geraden verschwindet demnach die Krümmung der Fläche, da in Bezug auf sie der Krümmungshalbmesser der Fläche unendlich gross ist.

h. Volumen der Fläche.

Zum Schluss geben wir noch den Rauminhalt des ersten Theils (Γ_0) der Fläche, für welchen wir einen einfachen Ausdruck erhalten werden.

Die allgemeine Formel für das Volumen eines Körpers ist:

$$V = \int_{x_0}^{x\omega} dx \int_{y_1}^{y^2} dy \int_{z_1}^{z_2} dz.$$

Nun haben wir gefunden, dass die Grenzen des Theils der Fläche, dessen Volumen wir bestimmen wollen, sind im Sinne der x-Axe: $= \pm \frac{c}{\sin\varphi}$, der y-Axe: $= \pm \frac{c}{\cos\varphi}$ für z endlich ergiebt sich aus der Gleichung (16) der Fläche:

$$z = \pm \frac{1}{c}\sqrt{(c^2 - x^2\sin^2\varphi)\,(c^2 - y^2\cos^2\varphi)}.$$

Demnach erhalten wir:

$$(64)\ \ V = \frac{1}{c}\int_{-\frac{c}{\sin\varphi}}^{\frac{c}{\sin\varphi}} dx \int_{-\frac{c}{\cos\varphi}}^{\frac{c}{\cos\varphi}} dy \int_{-\sqrt{(c^2 - x^2\sin^2\varphi)\,(c^2 - y^2\cos^2\varphi)}}^{\sqrt{(c^2 - x^2\sin^2\varphi)\,(c^2 - y^2\cos^2\varphi)}} dz;$$

$$= \frac{2}{c}\int_{-\frac{c}{\sin\varphi}}^{\frac{c}{\sin\varphi}} dx \int_{-\frac{c}{\cos\varphi}}^{\frac{c}{\cos\varphi}} dy\,\sqrt{c^2 - x^2\sin^2\varphi)\,(c^2 - y^2\cos^2\varphi)}$$

$$= \frac{8}{c} \int_0^{\frac{c}{\sin\varphi}} dx \sqrt{(c^2 - x^2 \sin^2\varphi)} \int_0^{\frac{c}{\cos\varphi}} dy \sqrt{(c^2 - y^2 \cos^2\varphi)}.$$

Um diese Integrale rational zu machen führen wir für x und y neue Veränderliche ein durch die Relationen:

$$x \sin\varphi = c \sin\psi \text{ und } y \cos\varphi = c \sin\chi,$$

in welchen Gleichungen ψ und χ die neuen Veränderlichen sind. Es wird in Folge dessen:

$$dx = \frac{c}{\sin\varphi} \cos\psi \, d\psi; \; dy = \frac{c}{\cos\varphi} \cos\chi \, d\chi;$$

und die Grenzen gehen über in: 0 bis $\frac{\pi}{2}$. In Folge dessen wird aus Gleichung (61)

$$(65) \quad \ldots \ldots \quad V = \frac{8 c^3}{\sin\varphi \cos\varphi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\psi \, d\psi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\chi \, d\chi.$$

Führen wir die Integration aus, so erhalten wir für das Volumen von Γ_0 die Gleichung:

$$(66) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad V = \frac{c^3 \pi^2}{\sin 2\varphi}.$$

und wenn $\varphi = \frac{\pi}{4}$: $V = c^3 \pi^2$;

welcher Werth ein Minimum ist, wie dies auch erhellt, wenn φ als veränderlich angesehen wird und man dann differentiirt; denn alsdann

$$\frac{dV}{d\varphi} = -\frac{2 c^3 \pi^2 \cos 2\varphi}{\sin^2 2\varphi};$$

$$\frac{d^2 V}{d\varphi^2} = 2 c^3 \pi^2 \frac{2 \sin^2\varphi + \cos^2 2\varphi}{\sin^4 2\varphi}$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ist $\frac{dV}{d\varphi} = 0$, $\frac{d^2 V}{d\varphi^2}$ aber positiv; daher V für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ein Minimum; ein Maximum kann V nicht haben.

Kürzer konnten wir unter Berücksichtigung von II. c. pag. 6 noch auf folgendem Wege das Volumen von Γ_0 finden.

Der Inhalt eines in der Entfernung x vom Coordinaten-Anfangspunkte gelegten Ellipsenschnittes ist:

$$J = \frac{c \pi}{\cos\varphi} \sqrt{c^2 - x^2 \sin^2\varphi};$$

mithin

$$V = \frac{c \pi}{\cos\varphi} \int_{-\frac{c}{\sin\varphi}}^{\frac{c}{\sin\varphi}} dx \sqrt{(c^2 - x^2 \sin^2\varphi)}$$

$$= \frac{2 c \pi}{\cos\varphi} \int_0^{\frac{c}{\sin\varphi}} dx \sqrt{(c^2 - x^2 \sin^2\varphi)}$$

Diese Gleichung wie oben integrirt:

$$V = \frac{c^3}{\sin 2\varphi} \pi^2.$$